

ALGEBRA VETTORIALE

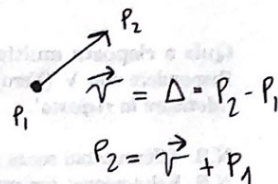
→ PUNTI e VETTORI: COSA RAPPRESENTANO?

• PUNTO = UNA POSIZIONE nello SPAZIO • $P(x, y, z)$

• VETTORE = UNO SPOSTAMENTO nello SPAZIO

• IL DELTA FRA due POSIZIONI (non è riferito ad una SPECIFICA POSIZIONE)

• HA UNA LUNGHEZZA e UNA DIREZIONE



→ VETTORE

$$\vec{r} = a - b$$

ES.:

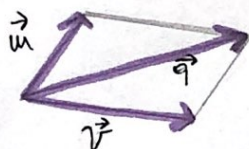
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ SOMMA di 2 VETTORI

$$\vec{r} + \vec{u} = \vec{q}$$



→ SCALATURA di UN VETTORE

• MOLTIPLICARE UN VETTORE PER UN NUMERO REALE K $K \cdot \vec{r}$ con $K \in \mathbb{R}$

• ALLORCIO (SE $0 < K < 1$) o ALLUNGO (SE $K > 1$) IL VETTORE di UN FATTORE K

$$\text{ES.: } 2\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}$$

• SE $K < 1$ IL VETTORE VIENE ALLUNGATO e RIBATTATO

→ VETTORE DEGENERE (NUOVO) = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

PROBLEMA

• TROVARE LA POS. di C

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \quad C = B + \vec{r} = B + (B - A)$$

→ LUNGHEZZA di UN VETTORE (NORMA EUCLIDEA, MAGNITUDINE, INTENSITA')

• LEGATO AL CONCETTO di DISTANZA TRA 2 PUNTI

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|a - b\|$$

PROBLEMA

• DATO $\vec{r}$ TROVARE UN VETTORE con DIREZIONE $\vec{r}$ MA LUNGHEZZA 1

$$\vec{r} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}\|} = \hat{r} \leftarrow \text{VETTORE UNITARIO (NORMALE)}$$

CORRISPONDE AL CONCETTO di DIREZIONE

• NON È POSSIBILE FARE QUESTA OPERAZIONE con UN VETTORE DEGENERE

INTERPOLAZIONE

→ COMBINAZIONE LINEARE (di 2 o + VETTORI)

$$\vec{u} = k_0 \vec{v}_0 + k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2$$

COMBINAZIONE LINEARE di $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$

PESI

INTERPOLATE = MIX = BLEND = UERP

→ INTERPOLAZIONE (o MEDIA PESATA)

- QUANDO i PESI k_0, k_1, k_2 SONO POSITIVI e A SOMMA 1.

$$\sum_i k_i = 1 \quad \text{e} \quad \forall i, 0 \leq k_i \leq 1$$

- SE i PESI SONO UGUALI A $1/n$ SI HA UNA MEDIA
- NUMERO TOT. dei PESI

- QUANDO $n=2$ UNO DEI 2 PESI e' ESPRIMIBILE COME DIFF. DELL'ALTRO

$$\text{MIX}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, t) = (1-t)\vec{v}_0 + t\vec{v}_1$$

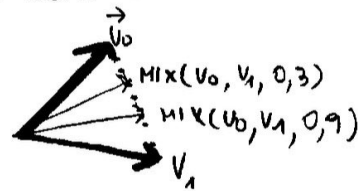
$$\text{MIX}(\text{VEC}, \text{VEC}, t) \rightarrow \text{VEC}$$

$t < 0$ o $t > 1 \rightarrow$ ESTRAP.

$t = 0,5 \rightarrow$ MEDIA

$t = 0 \rightarrow 1^o$ VEC

$t = 1 \rightarrow 2^o$ VEC

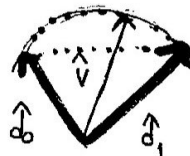
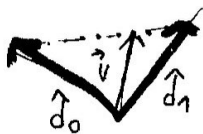


- INTERPOLAZIONE TRA 2 PUNTI

$$p_0 + (p_1 - p_0)t$$

$$\text{MIX}(\text{POINT}, \text{POINT}, t) \rightarrow \text{POINT}$$

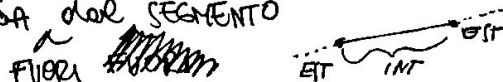
- ATTENZIONE! INTERPOLANDO FRA 2 VETTORI UNITARI SI OTTIENE UN VETTORE non UNITARIO, OCCORRE QUINDI RI-NORMALIZZARE DOPO L'INTERPOLAZIONE



$$\vec{v} = \frac{1}{3} \hat{d}_0 + \frac{2}{3} \hat{d}_1$$

$$\hat{v} = \frac{\frac{1}{3} \hat{d}_0 + \frac{2}{3} \hat{d}_1}{\left\| \frac{1}{3} \hat{d}_0 + \frac{2}{3} \hat{d}_1 \right\|}$$

- UN SEGMENTO e' L'INSIEME dei PUNTI OTTENIBILI INTERPOLANDO i SUOI ESTREMI
- L'INSIEME dei PUNTI OTTENIBILI ESTRAPOLANDO i SUOI ESTREMI e' LA RETTA CHE PASSA DAL SEGMENTO



→ COORDINATE BARICENTRICHE (SEGMENTO)

- QUALSIASI PUNTO in UN SEGMENTO S È DATO DA UNA e UNA SOLA INTERPOLAZIONE dei SUOI ESTREMI p_0 e p_1 . UOÈ DATO UN PUNTO $q \in S$, ESISTONO UNICI $k_0, k_1 \in [0, 1]$ con $k_0 + k_1 = 1$ TAU CHE:

$$q = k_0 p_0 + k_1 p_1$$

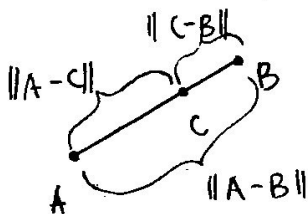


- k_0 e k_1 SONO DETTE COORDINATE BARICENTRICHE di q nel SEGMENTO S

PROBLEMA

- DATO UN SEGMENTO S di ESTREMI A e B e UN PUNTO $C \in S$, TROVARE LE COORDINATE BARICENTRICHE di C.

$$C = k_0 A + k_1 B \leftarrow \text{MIX}(A, B, k_0) \quad k_0 + k_1 = 1$$

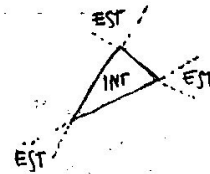


$$\|B - A\| = \|A - C\| + \|C - B\|$$

$$1 = \underbrace{\frac{\|A - C\|}{\|B - A\|}}_{k_0} + \underbrace{\frac{\|C - B\|}{\|B - A\|}}_{k_1}$$

$$k_0 = \frac{\|A - C\|}{\|A - B\|}$$

$$k_1 = \frac{\|C - B\|}{\|A - B\|}$$



- UN TRIANGOLO È L'INSIEME dei PUNTI OTTENIBILI INTERPOLANDO i SUOI 3 VERTICI ESTREMI

→ COORDINATE BARICENTRICHE (TRIANGOLO)

- DATO UN TRIANGOLO T di VERTICI p_0, p_1 e p_2 e UN PUNTO $q \in T$ ESISTONO UNICI k_0, k_1 e $k_2 \in [0, 1]$ con $k_0 + k_1 + k_2 = 1$ TAU CHE:

$$q = k_0 p_0 + k_1 p_1 + k_2 p_2$$

- k_0, k_1 e k_2 SONO DETTE COORDINATE BARICENTRICHE di q nel TRIANGOLO T

PROBLEMA

- DATO UN TRIANGOLO T CON VERTICI A, B, C E UN PUNTO $Q \in T$, TROVARE LE COORDINATE BARI CENTRICHE di q in T .

$$q = k_0 A + k_1 B + k_2 C \leftarrow \text{MIX}(A, B, C, k_0)$$

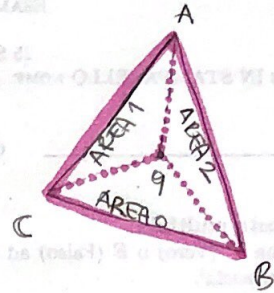
$$\text{AREA}_{\text{TOT}} = \text{AREA}_0 + \text{AREA}_1 + \text{AREA}_2$$

$$k_0 = \text{AREA}_0 / \text{AREA}_{\text{TOT}}$$

$$k_1 = \text{AREA}_1 / \text{AREA}_{\text{TOT}}$$

$$k_2 = \text{AREA}_2 / \text{AREA}_{\text{TOT}}$$

- IL CENTROIDE di T
HA COORDINATE BARI CENTRICHE
 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



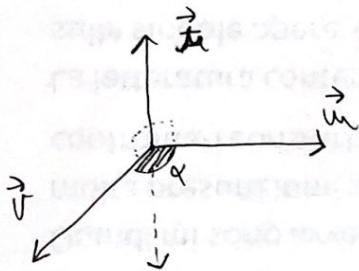
- IL PUNTO A HA COORDINATE BARI CENTRICHE $(1, 0, 0)$

PRODOTTO CROSS

- PRODOTTO CROSS o PRODOTTO VETTORIALE GENERA UN VETTORE A PARTIRE DA 2 VETTORI

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y u_z - v_z u_y \\ v_z u_x - v_x u_z \\ v_x u_y - v_y u_x \end{pmatrix} = \vec{x}$$

- NEVE LIBRERIE LO SI PUÒ TROVARE SCRITTO COME $\text{CROSS}(v, u)$; $v \wedge u$; $v \times u$
- ESISTE SOLO NEVE 3 DIMENSIONI ($\mathbb{R}^3$)
- LA COMPONENTE x di $\vec{x}$ SI OTTIENE IGNORANDO I VALORI y e z DEI 2 VETTORI E FACENDO UNA OP. A CROCE TRA GLI ELEMENTI x e y di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, COME FOSSE UNA MATRICE 2×2
- $\vec{x}$ È ORTOGONALE A $\vec{v}$ e $\vec{u}$, OVERO AL PIANO IN CUI STANNO I 2 VETTORI → QUESTO CI PERMETTE DI TROVARE LE NORMALI



- UN VETTORE ORTOGONALE A 2 VETTORI PUÒ ASSUMERE 2 VERSI OPPOSTI, L'ORIENTAMENTO DEL PRODOTTO CROSS DIPENDE DA COME SI IMMAGINA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO (ORDINE DEGLI OPERANDI)

- IL PRODOTTO CROSS NON È COMMUTATIVO MA ANTI-COMMUTATIVO

$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) \quad \text{È UGUALE AL SUO OPPOSTO}$$

- È LINEARE

PRODOTTI SCALARE
DISTRIBUZIONE
SOMMA VETTORIALE

$$k(\vec{v} \times \vec{u}) = k\vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \times k\vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

- PER TUTTI I VETTORI VALE

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$\hat{v} \times \hat{u} = \vec{0} \quad \begin{cases} \text{SE } \hat{u} = \hat{v} \\ \text{SE } \hat{v} = -\hat{u} \end{cases}$$

• LUNGHEZZA DEL VETTORE CROSS

$$\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| |\sin \alpha|$$

- SE $\hat{v}$ e $\hat{u}$ SONO UNITARI

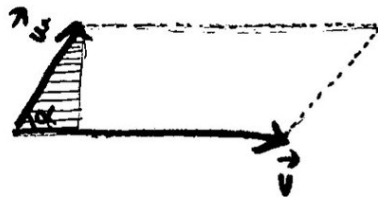
$$\|\hat{v} \times \hat{u}\| = |\sin \alpha|$$

- IL CALCOLO VETTORIALE CI PERMETTE DI NON CALCOLE IL $\sin \alpha$
- QUANDO $\vec{u}$ SI AVVICINA A $\vec{v}$ LA LUNGHEZZA DI $\vec{x}$ DIMINUISCE E VICEVERSA (È MASSIMO QUANDO $\alpha = \pi/2$ o $-\pi/2$)
- SE $\vec{u}$ e $\vec{u}$ SONO A $\alpha = 0$ o π o $-\pi$ IL PRODOTTO CROSS = 0
VETTORI ALLINEATI
- SE $\vec{v}$ o $\vec{u}$ È DEGENERE (OVVERO VETTORI NULLI) ALLORA $\vec{x}$ È DEGENERE
- $\hat{v} \times \hat{u}$ È UNITARIO SSE $\hat{v}$ e $\hat{u}$ SONO ORTOGONALI
- QUANDO IL PRODOTTO CROSS = 0 NON È POSSIBILE IDENTIFICARE UN PIANO e $\Rightarrow$ UN VETTORE ORTOGONALE

OSSERVAZIONE

- SI PUÒ VEDERE LA LUNGHEZZA DEL PRODOTTO CROSS COME

$$\underbrace{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| |\sin \alpha|}_{\text{AREA}}$$



SUPERFICI PARAMETRICHE

→ RIPASSO di TERMINOLOGIE

$$f: A \rightarrow B$$

• f è una FUNZIONE

• A è il DOMINIO di f e B il CODOMINIO di f

• $f(a) = b$ dove $a \in A$ e $b \in B$

• $\text{IMMAGINE}(f) = \{b \in B, \exists a \in A, f(a) = b\}$

INSIEME di ELEMENTI del CODOMINIO di f RAGGIUNTI da f

→ CURVA PARAMETRICA = CURVA DESCRITTA COME IMMAGINE di UNA FUNZIONE

$$f: A \rightarrow B \text{ dove } A \subseteq \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$$

$$\text{in } \mathbb{R}^3 \quad f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

• t è il PARAMETRO (o POS. PARAMETRICA)

• A è DOMINIO PARAMETRICO

• B è la CURVA (LUOGO di PUNTI)

→ DATO UN PARAMETRO t , il ^{PUNTO} $f(t)$ è sulla CURVA.

→ DIREZIONE TANGENTE in UN PUNTO $f(t)$ è

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

cioè LA DERIVATA di f CALCOLATA in t

• SE NORMALIZZATO OTTIENGO LA DIREZIONE

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

SCRITO ANCHE

$$\nabla f(t)$$

GRADIENTE VELOCITÀ

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$$

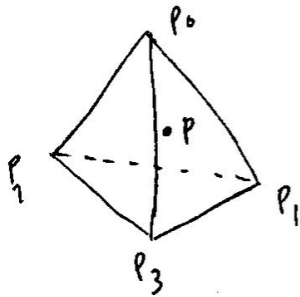
ESEMPIO:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

• LA DERIVATA SECONDA ~~che~~ DICE LA CURVATURA (e in FISICA L'ACCELERAZIONE)

MESH POLIEDRALE

• COMITO delle COORDINATE BARICENTRICHE DENTRO UN QUALSIASI ELEMENTO SIMPLICIALE



• DATO UN TETRAEDRO COSTITUITO dai suoi 4 VERTICI
E UN PUNTO P AL SUO INTERNO, TROVARE le
4 COORDINATE BARICENTRICHE / VALORI SCALARI $\lambda_0 \dots \lambda_m$ T.C.:

$$P = \sum_i \lambda_i p_i \quad \sum_i \lambda_i = 1 \quad \forall i: 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

• il VALORE DELL'ATTRIBUTO a in P SARÀ COSÌ DATO DALLA STESSA COMBINAZIONE
LINEARE DEGLI ATTRIBUTI $a_0 \dots a_m$ DEFINITI nei VERTICI

$$a = \sum_i \lambda_i a_i$$

SOLUZIONE SCHEMATIZZATA:

- ① UNIRE i 4 VERTICI $p_0 \dots p_m$ AL PUNTO P
- ② OTTENERE 4 NUOVI SOTTO-TETRAEDRI CHE SCOMPONGONO il TETRAEDRO ORIGINALE
- ③ CALCOLARE L'ESTENSIONE, OVVERO il VOLUME, dei NUOVI SOTTO-ELEMENTI
- ④ LA COORDINATA BARICENTRICA λ_i è DATA DALL'ESTENSIONE dell'ELEMENTO OPPOSTO A p_i DIVISO LA SOMMA delle ESTENSIONI (cioè DIVISO L'ESTENSIONE DELL'ELEMENTO ORIGINALE)

MODELLO IMPLICITO

→ NORMALE di UNA SUPERFICIE IMPLICITA

- P UN PUNTO sulla SUPERFICIE, cioè $f(P) = 0$
- LA NORMALE ALLA SUPERFICIE in P VALE

$$\hat{n} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}$$

- GRADIENTE di f VETTORE delle DERIVATE PARZIALI ~~non~~ CALCOLATO in P e RINORMALIZZATO
- il GRADIENTE $\nabla f(P)$ nel PUNTO P è DEFINITO dal VETTORE delle SUE DERIVATE PARZIALI in x, y, z CALCOLATE in P

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

FUNZ. PRIMITIVA della SFERA

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

PRODOTTO DOT

- OPERAZIONE FRA DUE VETTORI, DETTO ANCHE PRODOTTO $\left\{ \begin{array}{l} \text{RIGA PER COLONNA } (\vec{v}^T \vec{u}) \\ \text{SCALARE TRA VETTORI} \\ \text{INTERNO} \end{array} \right.$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

- IL RISULTATO È UNO SCALARE

- ALCUNE PROPRIETÀ:

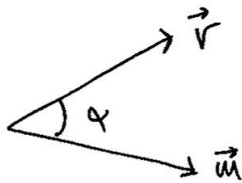
→ COMMUTA $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

→ LINEARE $k(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (k\vec{u})$

- DISTRIBUISCHE CON LA SOMMA VETTORIALE

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

- IL RISULTATO È IL NUMERO CHE COINCIDE AL PRODOTTO DELLE LORO LUNGHEZZE PER IL $\cos(\alpha)$



$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\alpha)$$

→ IL $\cos \alpha = 0$ SE $\alpha = \pi/2 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow$ (con $\vec{v} \neq 0$ e $\vec{u} \neq 0$) VETTORI ORTOGONALI

→ SE $\alpha > 90$ e QUINDI L'ANGOLO È OTTUZO → IL COSENO È NEGATIVO

→ SE PRODOTTO DOT È POSITIVO → ANGOLO ACUTO

→ SE $\hat{v} \cdot \hat{u} = 1 \rightarrow$ I VETTORI COINCIDONO ($0 < \hat{u} \cdot \hat{v} < 1 \leftarrow$ CONCORDI)

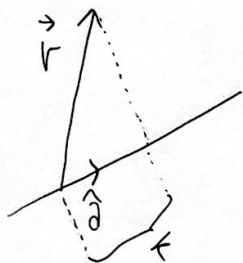
→ SE $\hat{v} \cdot \hat{u} = -1 \rightarrow$ OPPOSTI ($-1 < \hat{u} \cdot \hat{v} < 0 \leftarrow$ DISCORDI)

- FRA VETTORI UNITARI, IL PRODOTTO DOT È UNA MISURA DELLA SOMIGLIANZA FRA I DUE VETTORI

• PRODOTTO DOT DI UN VETTORE CON SE STESSO $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

→ PRODOTTO DOT E PROIEZIONE

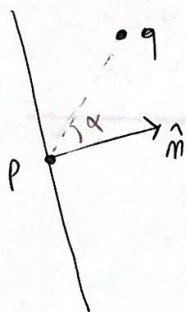
- POSSO SCOMporre il VETTORE nelle SUE COMPONENTI GRAZIE AL PRODOTTO DOT DEL VETTORE con UN VETTORE UNITARIO.



$$k = \hat{u} \cdot \vec{r} = \|\vec{r}\| \cdot \cos \alpha$$

ESERCIZIO

- SIA DATO UN PIANO PASSANTE PER P con NORMALE $\hat{m}$. CALCOLARE SE UN DATO PUNTO q



→ GIACE SUL PIANO

$$(q-P) \cdot m = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

→ DAVANTI AL PIANO

$$(q-P) \cdot m > 0 \rightarrow \alpha < 90^\circ$$

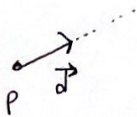
→ DIETRO AL PIANO

$$(q-P) \cdot m < 0 \rightarrow \alpha > 90^\circ$$

→ IL TEST non RICHIEDE CHE m SIA UN VETTORE UNITARIO, BASTA CHE SIA

RAY-TRACING

→ RAPPRESENTAZIONE di UN RAGGIO



• P = PUNTO di PARTENZA del RAGGIO

• $\vec{d}$ = VETTORE DIREZIONE

• I PUNTI SUL RAGGIO SONO I PUNTI $P + k\vec{d}$ PER UNO SCALARE $k \geq 0$

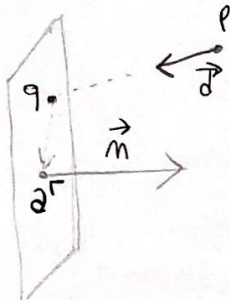
→ COSTRUZIONE del RAGGIO PRIMARIO

P = POINT OF VIEW, PUNTO di PARTENZA

$\vec{d}$ = DIREZIONE = $(q - P) / \|q - P\|$

q = POSIZIONE del PIXEL SUL PIANO IMMAGINE

→ INTERSEZIONE RAGGIO-PIANO



• PIANO DEFINITO DA $\left\langle \begin{array}{l} \text{PUNTO } a \text{ su cui esso} \\ \text{VETTORE NORMALE } \vec{m} \end{array} \right.$

• PUNTI SUL PIANO $\rightarrow (a - q) \cdot \vec{m} = 0$

• INTERSECARE RAGGIO CON PIANO =
TROVARE k (SE $\exists$) T.C. $(P + k\vec{d})$ SIA UN PUNTO SUL PIANO

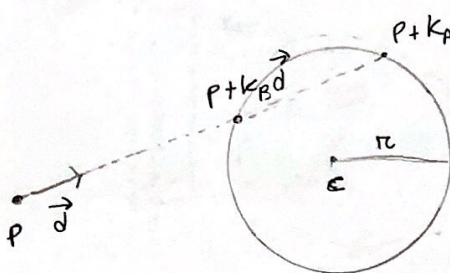
$$\rightarrow (a - q) \cdot \vec{m} = (a - (P + k\vec{d})) \cdot \vec{m} = 0$$

$$k = \frac{(P - a) \cdot \vec{m}}{\vec{d} \cdot \vec{m}}$$

$k > 0 \rightarrow$ RAGGIO INTERSECA il PIANO
A $a + k\vec{d}$

$\rightarrow 0 \rightarrow$ RAGGIO $\parallel$ PIANO $\rightarrow$ NO INTERSEZIONE

→ INTERSEZIONE RAGGIO-SFERA



• $f(q) = 0$ con $f(q) = \|q - c\|^2 - r^2$

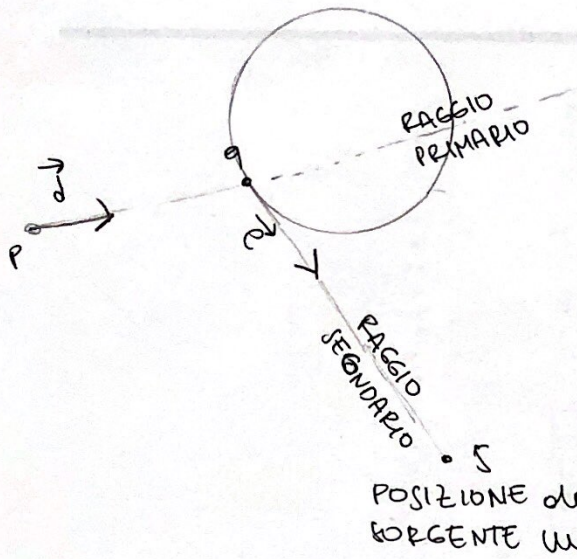
$$\rightarrow f(P + k\vec{d}) = 0 = \|P + k\vec{d} - c\|^2 - r^2$$

$$k^2 \underbrace{\|\vec{d}\|^2}_a + k \underbrace{2(P - c) \cdot \vec{d}}_b + \underbrace{\|P - c\|^2 - r^2}_c = 0$$

$$k_{A,B} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

← SI CONSIDERA SOLO LA SOLUZIONE MINORE

→ COMPUTO del RAGGIO SECONDARIO di SHADOWING



• RAGGIO PRIMARIO
 $(P, \vec{d})$

• PUNTO COLPITO $q = P + k\vec{d}$
 (PER UN CERTO k)

• RAGGIO di SHADOWING $(q, \vec{e})$

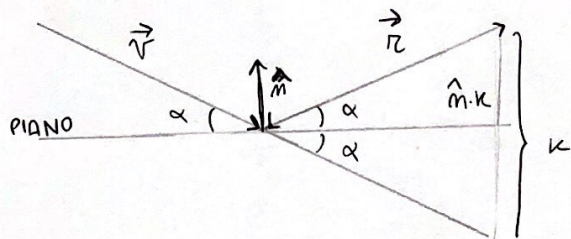
$$\vec{e} = \frac{(S - q)}{\|S - q\|}$$

→ RAGGIO di RIFLESSIONE $(q, \vec{d}_r)$ con $\vec{d}_r$ VETTORE $\vec{d}$ RIFLESSO
 DA UN PIANO di NORMALE $\hat{n}$ della SUP. nel PUNTO q.

→ RAGGIO di RIFRAZIONE $(q, \vec{d}_f)$ DIPENDE DALL'INDICE di RIFRAZIONE
 del MATERIALE

→ RAY TRACING e RIFLESSIONE: PER TROVARE IL RAGGIO SECONDARIO SI COINVOLGE

- LA DIREZIONE DEL RAGGIO PRIMARIO
- LA NORMALE DEL PUNTO COLPITO

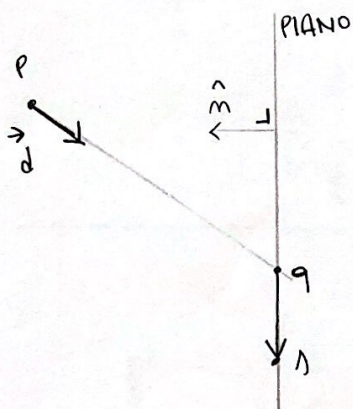


$$\vec{r} = \vec{v} + k \hat{m} \quad \text{con } k = -2 \vec{v} \cdot \hat{m}$$

↓
PERCHÉ $\vec{v}$ e $\hat{m}$
SONO DISCORDI

$$\vec{r} = \vec{v} + (-2 \vec{v} \cdot \hat{m}) \cdot \hat{m}$$

→ PROBLEMA: DOVE È Q? OVERO TROVARE K



$$q = p + k \vec{d} \rightarrow \text{PUNTO SUL PIANO}$$

$$(1 - q) \cdot \hat{m} = 0$$

$$(1 - p - k \cdot d) \cdot \hat{m} = 0$$

$$k = \frac{(1 - p) \cdot \hat{m}}{d \cdot \hat{m}} \rightarrow \text{SE } \epsilon < 0 \text{ IL PIANO NON È STATO COLPITO}$$

TRASFORMAZIONI SPAZIALI

- SONO FUNZIONI CHE PRENDONO UN $\begin{pmatrix} \text{PUNTO} \\ \text{VETTORE} \end{pmatrix}$ E LO MAPPANO IN $\begin{pmatrix} \text{PUNTO} \\ \text{VETTORE} \end{pmatrix}$ UN ALTRO

→ TRASLAZIONE

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha_x \\ y + \alpha_y \\ z + \alpha_z \end{pmatrix}$$

- I PUNTI VENGONO TRASLATI
MA I VETTORI RIMANGONO INVARIATI
(NORMA, DIREZIONE, DISTANZE)

→ SCALATURA (UNIFORME / $\begin{pmatrix} \text{INVARIANZA RISPETTO ALLA DIREZIONE} \\ \text{ISOTROPICA} \end{pmatrix}$ CONFORMALE)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot x \\ \gamma \cdot y \\ \gamma \cdot z \end{pmatrix}$$

- HA LO STESSO EFFETTO SU PUNTI E VETTORI
- SCALA ANCHE LA DISTANZA DALL'ORIGINE
- SE $\gamma > 1$ SINGRANDISCE, $\gamma < 1$ RIDUCE, $0 < \gamma < 1$ RIMPICCIOLISCE

- QUESTA TRASFORMAZIONE APPLICA LO STESSO RAPPORTO DI SCALA A TUTTE E 3 LE COORDINATE

→ ROTAZIONE di 90° in SENSO ANTICLOCKWISE

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

← ROTAZIONE di 90° ATTORNO ALL'ASSE Z

→ ROTAZIONE di 90° in SENSO CLOCKWISE

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

→ RAPPRESENTAZIONE di PUNTI e VETTORI in COORDINATE OMogenee

PUNTI

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

VETTORI

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

NOTA

PUNTO - PUNTO = VETTORE
PUNTO + VETTORE = PUNTO

→ ESPRIMENDO PUNTI E VETTORI IN COORDINATE OMOGENEE, POSSIAMO ESPRIMERE LE TRASFORMAZIONI ~~UNQUE~~ COME UNA MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE 4x4 M (LA TRASFORMAZIONE ESPRIMIBILE IN QUESTO MODO È DETTA AFFINE)

→ SCALING ISOTROPICO

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}$$

^ SEMPRE UGUALE

NOTA
 $\text{DET} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = A \cdot D - B \cdot C$
 - IL DETERMINANTE È IL FATTORE DI SCALA DEI VOLUMI DELLA TRASFORMAZIONE *

→ SCALING ANISOTROPICO

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x x \\ \gamma_y y \\ \gamma_z z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- SE $\text{DET} \neq 0$ ESISTE MAT. INVERSA

- MAT. IDENTITÀ = TRASF. IDENTITÀ

* ES: $\text{DET} = 0,5 \rightarrow$ MAT. RIDUCE I VOLUMI DEGLI OGGETTI TRASFORMATI del 50%

→ ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE Z di 90°

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ TRASLAZIONE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- MATRICE di TRASLAZIONE del VETTORE

$$t = (t_x, t_y, t_z)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ MATRICE di SIMMETRIA SPECULARE (MIRRORING)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ SEQUENTE di TRASFORMAZIONI

$$M_A \cdot (M_B \cdot p) = (M_A \cdot M_B) p \quad \leftarrow \text{LA MOLTIPLICAZIONE È ASSOCIATIVA}$$

MA NON COMMUTATIVA

→ SONO FUNZIONI LINEARI

→ in 2D le TRASFORMAZIONI AFFINI SONO MATRICI 3x3 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

→ CALCOLO DELL'INVERSA di UNA MAT. di TRASFORMAZIONE

→ INVERSA MAT. di ~~TRASFORMAZIONE~~ SCALATURA

$$\begin{bmatrix} 1/\delta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\delta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\delta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha)^{-1} = R_z(-\alpha) = R_z(\alpha)^T$$

→ INVERSA di MAT. di TRASLAZIONE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ INVERSA di MAT. di ROT.

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

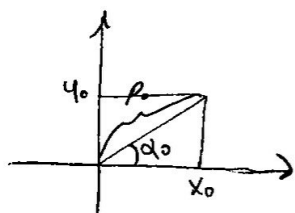
→ L'INVERSA della MAT di SIMMETRIA SPECULARE È LA MATRICE STESSA

→ INVERSA di UNA COMPOSIZIONE di TRASFORMAZIONI $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

→ INVERSIONE di UNA AFFINE GENERICA

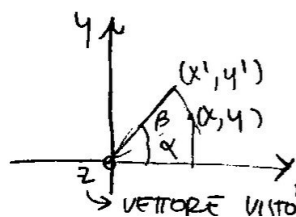
$$\begin{bmatrix} M & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M^{-1} & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ TRASF. di ROTAZIONE in 2D ATTORNO ALL'ORIGINE, di UN ANGOLO β , IN SENSO ANTI-ORARIO



$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ \alpha_0 &= \arctan 2(y_0, x_0) \end{aligned} \right\} \text{COORDINATE POPOLARI}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0) \\ y_0 &= \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0) \end{aligned} \right\} \text{COORDINATE CARTESIANE}$$



$$x' = x \cos \beta - y \sin \beta$$

$$y' = x \sin \beta + y \cos \beta$$

→ VETTORE VISTO DAVANTI

→ TRASFORMAZIONE di ROTAZIONE 3D ATTORNO ALL'ASSE Z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \beta - y \sin \beta \\ x \sin \beta + y \cos \beta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

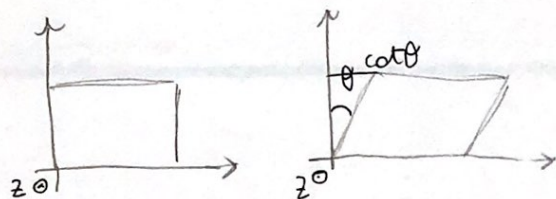
MATRICE di ROTAZIONE di ANGOLO β ATTORNO ALL'ASSE Z

→ LA INVERSA di $R_z(\theta)^{-1} = R_z(-\theta) = R_z(\theta)^T$ ← SI CAMBIA IL SEGNO AL $\sin \beta$
SI TRASPONE LA MATRICE

- SI APPICA nello STESSO MODO AI PUNTI E AI VETTORI

- TUTTE LE MATRICI di ROTAZIONE con ASSE QUALSIASI PASSANTE PER L'ORIGINE
LE POSSO COSTRUIRE COMBINANDO 3 ROTAZIONI SUI 3 ASSI X, Y, Z

→ TRASFORMAZIONE di SHEARING

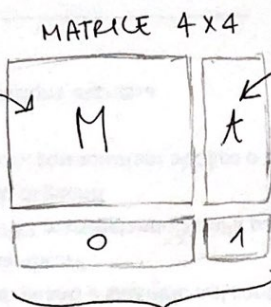


$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + y \cot \theta \quad y' = y \quad z' = z$$

→ SOMMARIO

SOTTOMATRICE 3x3
CHE SI APPICA AVE
COORD. CARTESIANE SIA
dei PUNTI CHE dei
VETTORI



VETTORE A CHE SI SOMMA A
RISULTATO QUANDO TRASFORMO
PUNTI, MA VIENE MOLTIPLICATO
PER 0 QUANDO
TRASFORMO i VETTORI.

ULTIMA RIGA (0,0,0,1) COSÌ CHE i PUNTI VENGANO MAPPATI
SEMPRE in PUNTI, e i VETTORI SEMPRE in VETTORI

- DEFICIT di RANGO della MAT = RANGO MAX (4). - RANGO MAT

è la PERDITA di DIMENSIONALITÀ, RANGO

3 → OGGETTI PATTI
2 → LINEA
1 → PUNTO

→ ABBIAMO ASSUNTO TACITAMENTE CHE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO FOSSE

- CON ASSI ORTOGONALI

- ~~ASSI~~ CON ASSI CHE HANNO LA STESSA LUNGHEZZA (UNITARIA)

- CON ORIGINE IN $(0,0,0)$

- MA UN SISTEMA DI RIF. PUO' ESSERE NON ORTOGONALE

→ PRODOTTO MATRICE X VETTORE

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 + A_{13}B_3 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 + A_{23}B_3 \\ A_{31}B_1 + A_{32}B_2 + A_{33}B_3 \end{bmatrix}$$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

→ UN SISTEMA DI RIFERIMENTO R (o REFERENCE FRAME o SPAZIO) E' DEFINITO DA:

- UNA BASE VETTORIALE $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$, GLI ASSI dello SPAZIO

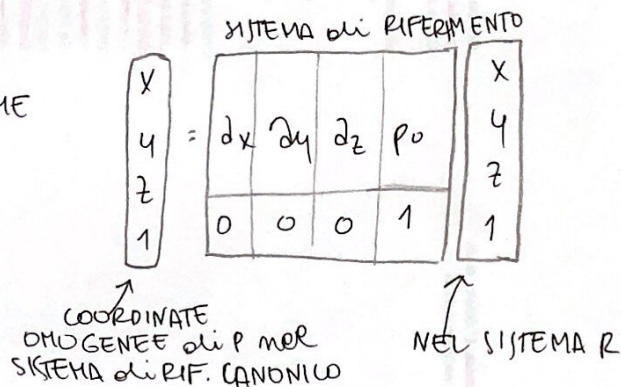
- PUNTO di ORIGINE p_0

- OGNI PUNTO PUO' ESSERE ESPRESSO COME

$$P = p_0 + x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

- OGNI VETTORE COME

$$V = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$



→ SISTEMA CANONICO

$$\vec{a}_x = (1, 0, 0) \quad \vec{a}_y = (0, 1, 0) \quad \vec{a}_z = (0, 0, 1) \quad p = (0, 0, 0) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

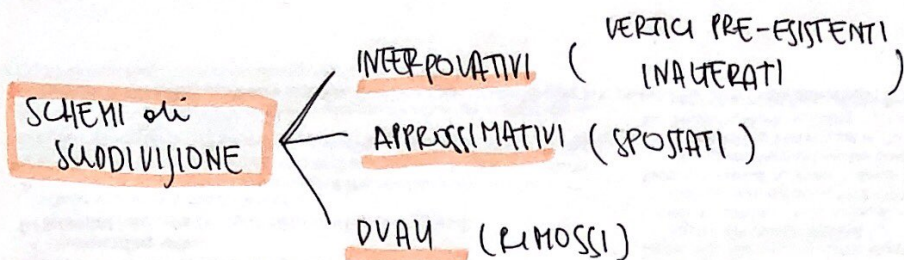
→ OBJECT SPACE VS WORLD SPACE

- SISTEMA DI RIFERIMENTO OGGETTO = ORIGINE + ASSE dello OGGETTO

- SISTEMA DI RIFERIMENTO MONDO = ORIGINE + ASSE dello SCENA

CONNETTIVITÀ = INSIEME delle FACCE $F_0 \rightarrow (x, y, z) \leftarrow$ UNA FACCE

GEOMETRIA = INSIEME dei VERTICI $V_0 \rightarrow (x, y, z)$ + ATTRIBUTI



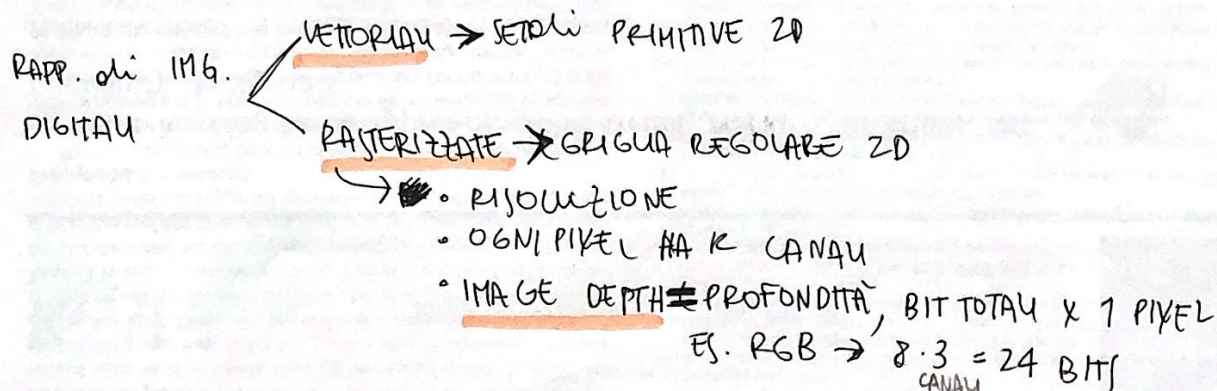
SCHEMI di SUDDIVISIONE di SUPERFICIE (SUBDIVISION SURFACE):

- BUTTERFLY $\rightarrow$ DA TRI-MESH A TRI-MESH + INTERPOLATIVO
- LOOP $\rightarrow$ DA TRI-MESH A TRI-MESH + APPROSSIMATIVO
- CATMULL-CLARK $\rightarrow$ DA MESH-POLIGONALE (GENERICA) A PURE-QUAD MESH + APPROSSIMATIVO
- POO-SABIN $\rightarrow$ DA MESH-POLIGONALE A MESH-POLY + QUADRE

$\rightarrow$ CI SONO 2 MODI PER USARE UNO SCHEMA di SUDDIVISIONE

- X RAPPRESENTARE SUP. CURVE
- X COSTRUIRE MESH POLIGONALE HI-RES

$\rightarrow$ IL PIXEL su UN MONITOR RIPRODUCE UN COLORE USANDO UNA SINTESI ADDITIVA di 3 CANALI: RGB OGNI UNO con l'INTENSITÀ DESIDERATA (da 0,0 a 1,0 o da 0 a 255, 8 BIT). POSSONO ESSERE VISTE COME 3 COORDINATE su UN PUNTO nello SPAZIO COLORE 3D RGB.



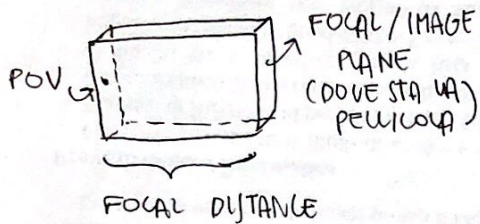
RAGGIO DINAMICO = RAPP. FRA WM. del PUNTO + WM di QUELLO + BUIO
HPRI $\rightarrow$ RAGGIO DINAMICO + WNGO $\rightarrow$ + BIT x CANALE

→ MEMORIA = RES X. RES Y. IMAGE DEPTH

→ COMPRESSIONE $\begin{cases} \text{LOSSLESS} \\ \text{LOSSY} \\ \text{TEXTURE COMPRESSION} \end{cases}$

FRU RATE = FRAME RATE X SCREEN RESOLUTION X ~~FRAME RATE~~ ^{PIVEL DEPTH}

PIN-HOLE CAMERA $\begin{cases} \text{CATTURA LA LUCE CHE PASSA PER IL POV} \\ \text{MISURA QUANTA LUCE ARRIVA da OGNI DIREZIONE} \end{cases}$



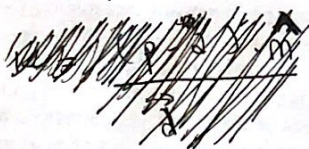
→ RAGGIO PRIMARIO $(p, \vec{d})$ PUNTO COLLITO = $q = p + k \cdot \vec{d}$ $p = \text{POV}$

→ RAGGIO SHADOWING $(q, \vec{e})$ con $\vec{e} = s - q$

↳ POSIZIONE della LUCE

→ RAGGIO di ~~INTERSEZIONE~~ $(q, \vec{d}_r)$ con $\vec{d}_r = \text{VETTORE RIFLESSO su un PIANO di NORMALE } \hat{m} \text{ (NORM. della SUP. in } q)$
RIFLESSIONE

→ INTERSEZIONE RAGGIO PIANO



$$k = \frac{(p - q) \cdot \hat{m}}{\vec{d} \cdot \hat{m}} > 0 \quad p \text{ INTERSECA il PIANO a } q + k \cdot \vec{d}$$

→ INTERSEZIONE RAGGIO - SFERA

$$k_{A,B} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

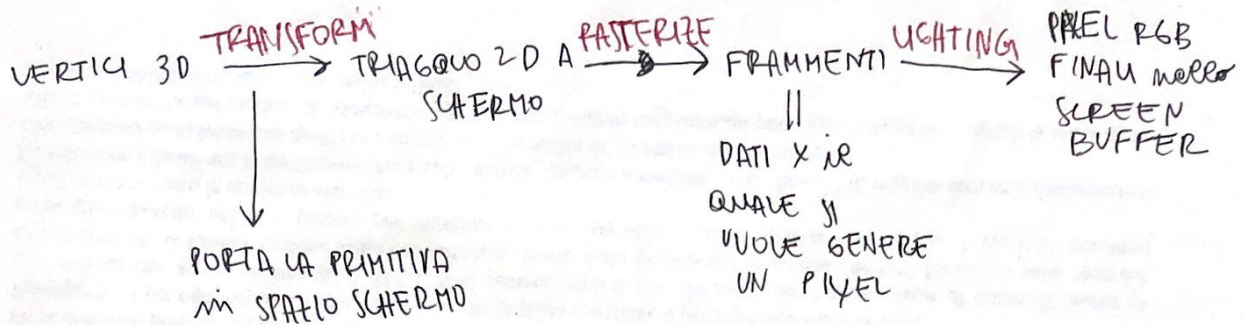
$$k^2 \underbrace{\|\vec{d}\|^2}_A + k \cdot \underbrace{2(p-c) \cdot \vec{d}}_B + \underbrace{\|p-c\|^2 - r^2}_C = 0$$

→ ALGO di RENDERING BASATI SULLA RASTERIZZAZIONE SONO SUPPORTATI DALLA GPU

→ ~~TRIANGOLI~~

di TRIANGOLI

T & L = TRANSFORM & LIGHTING



→ L'ALGORITMO A PIPELINE
CONSITE IN DIVERSE FASI

- VERTICE (TRANSFORM UNITED)
- TRIANGOLO
- FRAMMENTI (FRAGMENT UNITED)

SE LO VOGLIO DI BOTTIGLIA LA APP. SI DICE

→ QUANTO PRIMITIVE DI RENDERING USANO LA RASTERIZATION? QUANTO PIÙ COSE SI PROIETTA (DA 3D A 2D) RASTERIZZA (2D)

- PUNTI (POINT SPATTING)
- SEGMENTI
- TRIANGOLO

→ QUANTO PRIMITIVE DI RENDERING USANO IL RAY-TRACING? QUANTO PIÙ COSE SI SAPPRA INTERSECCARE CON UN RAGGIO → TRIANGOLO

RAY-TRACING	RASTERIZATION
→ LENTO MA ACCURATO	→ VELOCE MA APPROSSIMATO
← MODO COMUNE →	

→ SEQUENZA DI TRASFORMAZIONI NEL RENDERING:
OGGETTO → MONDO → VISTA → CUP
MODELLO VISTA PROIEZIONE

→ COORDINATE OMOGENEE

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$	PUNTO	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$	VEETTORE
--	-------	--	----------

MAT di MODELATIONE = DA OGGETTO A MONDO

MAT di VISTA = DA MONDO A VISTA

• DIPENDE da $\begin{matrix} \text{DOVE} \\ \text{COME} \end{matrix}$ è POSIZIONATA LA VIDEOCAMERA

• I PARAMETRI ESTRINSECI della VIDEOCAMERA:

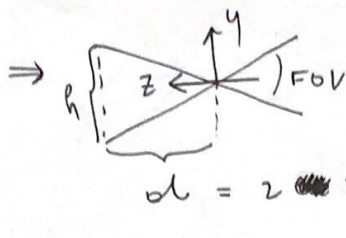
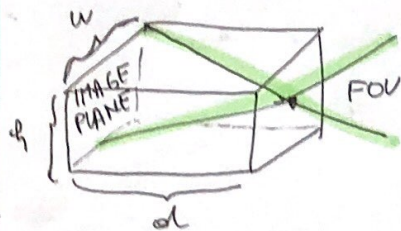
- POV - PUNTO OSSERVATO - UP VECTOR

↑ DESCRIVONO LA POS + ORIENTAMENTO della CAMERA nella SCENA (→ in SPAZIO MONDO)

MAT di PROIEZIONE = DA VISTA a CLIP.

• PARAMETRI INTRINSECI della CAMERA:

- DIMENSIONE IMAGE PLANE - DISTANZA FOCALE - FOV
(w, h) (d) (°)



$$FOV = 2 \arctan\left(\frac{h}{2d}\right)$$

BASIC ↗

$$\text{PROIEZIONE PROSPETTIVA} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ -z \end{pmatrix}$$

COORD. VISTA

PIANO Z COSTANTE

$$\begin{pmatrix} -x \cdot d/z \\ -y \cdot d/z \\ -d \\ 1 \end{pmatrix}$$

COORD. CLIP

d PICCOLA → DISTORSIONE

d GRANDE → PROPORZIONI MANTENUTE

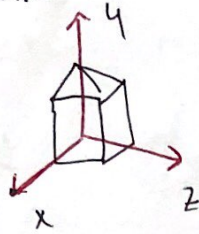
$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ A \cdot z + B \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \cdot d/z \\ -y \cdot d/z \\ -A - B/z \\ 1 \end{pmatrix}$$

a = ASPECT RATIO
 $\frac{RES_x}{RES_y}$

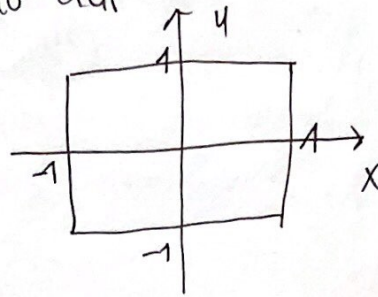
$$A = \frac{z_{FAR} + z_{NEAR}}{z_{FAR} - z_{NEAR}}$$

$$B = \frac{z \cdot z_{FAR} - z_{NEAR}}{z_{FAR} - z_{NEAR}}$$

SPAZIO OGGETTO



SPAZIO CLIP

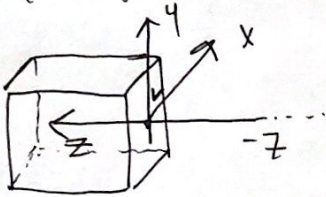


Z = ORTOGONALE ALLO SCHERMO, VA DA -1 A 1

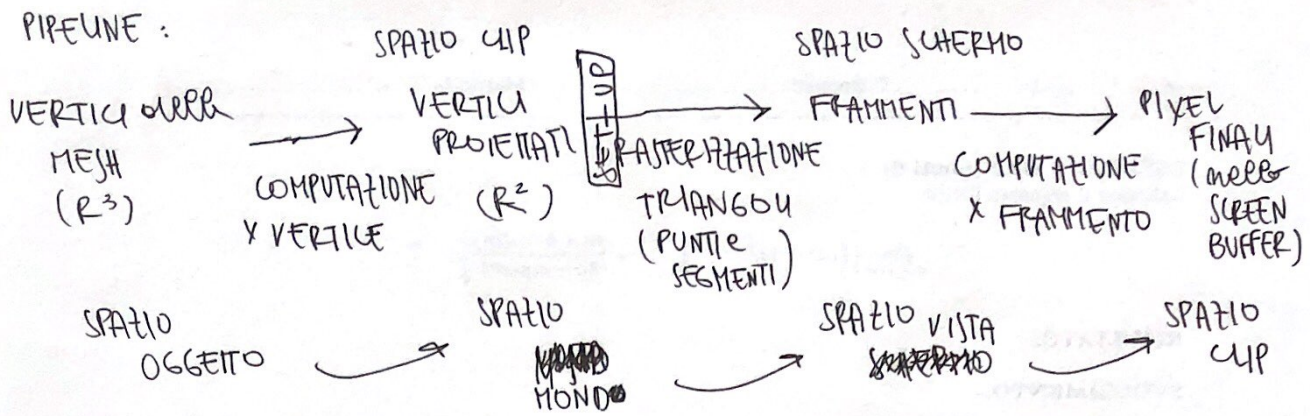
SPAZIO MONDO $\rightarrow$ MAT DI TRASFORMAZIONE

SPAZIO VISTA

ORIGINE = POV



	SPAZIO VISTA	CLIP	SCHERMO	
x	LEFT	-1	0	RES x
	RIGHT	1	1	
y	BOTTOM	-1	0	RES y
	TOP	1	1	
z	-z MIN	-1	0	PIXEL DEPTH
	-z MAX LA + LONTANEA	1	1	



RASTERIZZAZIONE = DA PRIMITIVA a FRAMMENTO. IMPLEMENTATO da HW.

- ↳ INTERPOLAZIONE degli ATTRIBUTI in OGNI FRAMMENTO
- IL CENTRO del PIXEL RICADE DENTRO il TRIANGOLO 2D? SE SI C'È UN FRAMMENTO

- UN TRIANGOLO è l'INTERSEZIONE di 3 SEMIPIANI → UN PUNTO P È A UN SEMIPIANO SE

$\vec{d} = (V_1 - V_0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{d}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$(P - V_0) \cdot \vec{d}' < 0 \rightarrow$ DENTRO (ANGOLO OTTUSO)

EDGE FUNCTION ↳ PRODOTTO DOT

- SE EDGE FUNCTION = 0 SU 2 TRIANGOLI È A 1 SOLO SU 2

- CIPPING = TAGUATO in PARTE FUORI dal VIEWPORT (SCREEN) - CIPPING = TUTTO FUORI

- DEPTH SORTING = (ALGO. del PITTORE) ORDINO LE PRIMITIVE BACK-TO-FRONT (Z SPAZIO VISTA PRESENTE)
 - $O(m \log m)$ (LENTO) • NON $\exists$ ORDINAMENTO CORRETTO SEMPRE
 - UNA PRIMITIVA non HA UNA SOLA Z

- BACK-FACE CIPPING = IL FACING di UNA FACCEA è il SEGNO del PRODOTTO DOT FRA NORMALE delle FACCEA DIREZIONE di VISTA VERSO IL POV
 - ↓
 - SE < 0 FRONT-FACING

→ ANCHE l'ORIENTAMENTO sui VERTICI INDICA SE il FACING

EDGE TEST → SE SUPERA 3/3 TEST → FRONT FACING

→ B-F CIPPING AVVIENE NELLA FASE di SET-UP CHE PRECEDE LA RASTERIZZ.

→ LA BDRF PRENDE in INPUT $\vec{w}_i$ DIR. PROVENIENZA UCE
 DIR. USITA UCE $\vec{w}_r$

• DA in OUTPUT QUANTA UCE PROVENIENTE da $\vec{w}_i$ VERRA' MANDATA in $\vec{w}_r$

→ SUP. OPACHE
MATERIALE LAMBERTIANO = (PURAMENTE DIFFUSIVO) RIFLETTE LA STESSA % di UCE in TUTTE le DIREZIONI POSSIBILI, INDIPENDENTEMENTE DALLA DIR. DA CUI ARRIVA LA UCE → NO RIFLESSI, STESSO COLORE DA TUTTI gli ANGOLI (SUP. IRREGOLARE)

$$P_{fr}(\vec{w}_i, \vec{w}_r) = \text{costante}$$

AUBEDO = COSTANTE, RAPPORTO TRA UCE INCIDENTE (QUANTO CHIARO) RIFLESSA (QUANTO SCURO E' IL MAT)

• VA DA $< 0 \rightarrow$ MATERIALE NERO, ASSORBE COMPLETAMENTE LA UCE
 $1 \rightarrow$ BIANCO, RIFLETTE

→ QUANTI WHEI RIVEVE UN INTORNO di X con NORMALE $\vec{m}_x$?

LEGGE DEL COSENO $\rightarrow \cos \alpha \cdot L = (\vec{w}_i \cdot \vec{m}_x) \cdot L$

• SE = 0 → UCE RADENTE • SE < 0 UCE DA DIETRO (VA A 0)

• LUMINOSITA' FINALE DEL PIXEL

$$P = (\vec{m}_x \cdot \vec{w}_i) D L$$

↳ INTENSITA' della UCE
 ↳ PRODOTTI DOT
 ↳ AUBEDO del MATERIALE
 ↳ DIR
 TANTO + LA UCE E' SIMILE ALLA DIR. della SUP, MAGGIORMENTE CHIARA APPARE.

• LIGHTING a COLORI

$$\begin{pmatrix} R_r \\ G_r \\ B_r \end{pmatrix} = (\vec{m}_x \cdot \vec{w}_i) \begin{pmatrix} P_r \\ D_g \\ D_b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_r \\ L_g \\ L_b \end{pmatrix}$$

↳ PRODOTTI COMPLEX COMP
 ↳ BASE/DIFFUSE/LAMB. COLOR = COLORE OGGETTO in X
 ↳ SCALATURA del VETTORE RGB

→ QUANDO CI SONO + SORGENTI DI LUCE BASTA SOMMARE I VARI CONTRIBUTI

• CI SONO 2 TIPI DI SORGENTI DI LUCE ← DIREZIONALI (DISTANTI) ↙
 POSIZIONALI (VICINI) ↘

DIREZIONALI = $\vec{u}$ COSTANTE SU TUTTA LA SCENA
 CON INTENSITÀ (L_R, L_G, L_B)

• POSIZIONALI = $\vec{u} = \frac{P_L - Q}{\|P_L - Q\|}$

(SPAZIO MONDO)
 Q = PUNTO CHE RICEVE LUCE DALLA DIR. $\vec{u}$

P_L = DOVE SI TROVA LA LUCE

$f_{\text{AFFIEVIMENTO}} = \frac{1}{\|P_L - Q\|^2} = 1/d^2$

MATERIALE PHONG = RIPRODUCE L'EFFETTO DI SPEC. LUCIDE

$\vec{R} = -\vec{u} + 2(\vec{u} \cdot \vec{m}) \cdot \vec{m}$

↑
 PRODOTTO DOT

→ MODELLO DI PHONG

$(\vec{u} \cdot \vec{R})^s \begin{pmatrix} H_R \\ H_G \\ H_B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_R \\ L_G \\ L_B \end{pmatrix}$
 INTENSITÀ-COLORE
 DEGLI HIGHLIGHTS → INTENSITÀ-COLORE
 DELLA LUCE

s = SPECULAR EXP. / SHININESS → + È GRANDE + PICCOLI E CONCENTRATI SONO I RIFLESSI. $s > 1$

BUMPHONG = SIMILE A PRIMA MA NON CALCOLO $\vec{R}$ MA $\vec{h}$

$\vec{h}$ = HALF-WAY VECTOR = $\frac{\vec{u} + \vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\|}$

→ MODELLO BUMP-PHONG

$(\vec{m} \cdot \vec{h})^s \begin{pmatrix} H_R \\ H_G \\ H_B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_R \\ L_G \\ L_B \end{pmatrix}$

→ IL MODELLO COMPLETO AGGIUNGE (A OGNI LUCE) LA COMPONENTE
 e UNA LUCE AMBIENTALE $\begin{pmatrix} A_R \\ A_G \\ A_B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L_R \\ L_G \\ L_B \end{pmatrix}$ ← DIFFUSIVA
 SPECULARE

→ B-F CUMING FUNZIONA X SUP ← CHIUSO
OPACHE
BEN ORIENTATE

• MIGLIORO LE APP. FULL-UNITED.

• NON RIMUOVE TUTTE LE SUP. ~~PARALLELE~~ (ES. SUP. CONCAVE)
• ORDER-INDIPENDENT NASCOSTE

- DEPTH TEST = SI USA UNA STRUTTURA DATI APPOSITA.

↳ DEPTH BUFFER = BUFFER COM PIÙ SCREEN BUFFER CHE X OGNI POS.
[X, Y] MEMORIZZA LA DEPTH DEL FRAMMENTO PRESENTE IN QUELLA
LOCAZIONE (CREA UNA DEPTH IMAGE ~ RANGE SCAN)

• LA DEPTH VA DA -1 + VICINO → $Z = -1$
 1 + LONTANO → $Z = +1$ $D = \frac{1+Z}{2}$
SPAZIO CLIP

• IL TEST FUNZIONA ANCHE CON ECCI E INTERSEZIONI

• ORDER-INDIPENDENT MA MEGLIO FRONT-TO-BACK

Z-FIGHTING = Z SIMILE o VICINA PROBLEMA CHE NON SI RISOLVE

PARTICIPATING MEDIUM = MEZZO NEL QUALE VIAGGIA LA LUCE (+ VIAGGIA + EFFETTO)

OPACITÀ FINALE DELLA NEBBIA $\leftarrow \begin{matrix} 0 \rightarrow 0\% \text{ NEBBIA} \\ 1 \rightarrow 100\% \text{ NEBBIA} \end{matrix}$

$$\uparrow \text{FOG} = \text{CLAMP} \left(\frac{-\text{END} - Z}{-\text{END} + \text{START}}, 0, 1 \right)$$

• CLAMP PORTA A $\left\{ \begin{matrix} 0 \text{ SE } < 0 \\ 1 \text{ SE } > 1 \end{matrix} \right.$

• Z COORD. SPAZIO VISTA

• START = DIST. DALL'OSSERVATORE PRIMA DELLA QUALE NON C'È NEBBIA

• END = DIST. DOVE DOPO C'È 100% NEBBIA

$$\text{COLORE FINALE} = \text{FOG} \cdot \text{COLORE NEBBIA} + (1 - \text{FOG}) \cdot \text{COLORE FRAMMENTO}$$

↳ COMPUTO X FRAMMENTO

LIGHTING LOCAL = LUCE → OGGETTO → OCCHIO

BRDF = BIDIRECTIONAL RADIANCE DISTRIBUTION FUNCTION, DESCRIVE IN MODO ESAUSTIVO UN MATERIALE (X IL LIGHTING LOCAL)

INTERPOLAZIONE
NELLA ~~NEBBIA~~
COMPUTAZIONE X FRAMMENTO